12/12/2022. Segundo Recuperatorio. Análisis Matemático III. Cursos 5 A y B.

1. Probar que para todo número α: $-1 < \alpha < 1$ la siguiente integral impropia es convergente y calcularla para $\alpha = 1/2$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(16+x^2)}\,dx.$
   Sugerencia: para el cálculo de la integral efectúe el cambio de variable $t = x^{1/2}$.

2. Dada la función $f(z) = \dfrac{1}{z}cosh\Big(\dfrac{1}{z}\Big) + \dfrac{z+2}{z^2(z-2)}$. Hallar la parte principal de su serie de Laurent válida en un entorno reducido de $z = 0$, indicando la región de convergencia. A partir de ésta, **a)** determinar el tipo de singularidad en $z = 0$. **b)** hallar el valor del residuo de $f(z)$ en $z = 0$.

3. **a)** Hallar todas las funciones $f(z)$ analíticas de la forma $f(z) = u(x) + iv(y)$.
   b) Sea f holomorfa en todo el plano complejo, excepto en z_0 donde tiene un polo de orden 3, y $|z_0| < 3$ y $f(z) \neq 0$ para todo z: $|z| \leq 3$. Calcular $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$

4. Dada $T(z) = \dfrac{2-8z^2}{1+4z^2}$. Indique en qué puntos es conforme y halle $T(D)$, siendo:
$$D = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1/2;\ 0 \leq Arg(z) \leq \tfrac{\pi}{2}\right\}$$

5. Sea $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(-2)^{3n}} z^{n-4}$. **a)** Hallar el dominio de holomorfía de f, **b)** Hallar el valor de $I_1 = \displaystyle\int_{\mathcal{C}^+} z^2 f(z)dz$ y de $I_2 = \displaystyle\int_{\mathcal{C}^+} \frac{f(z)dz}{z^2}$, con $\mathcal{C} = \{|z-1| = 3\}$

12/12/2022. Segundo Recuperatorio. Análisis Matemático III. Cursos 5 A y B.

1. Probar que para todo número α: $-1 < \alpha < 1$ la siguiente integral impropia es convergente y calcularla para $\alpha = 1/2$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(16+x^2)}\,dx.$
   Sugerencia: para el cálculo de la integral efectúe el cambio de variable $t = x^{1/2}$.

2. Dada la función $f(z) = \dfrac{1}{z}cosh\Big(\dfrac{1}{z}\Big) + \dfrac{z+2}{z^2(z-2)}$. Hallar la parte principal de su serie de Laurent válida en un entorno reducido de $z = 0$, indicando la región de convergencia. A partir de ésta, **a)** determinar el tipo de singularidad en $z = 0$. **b)** hallar el valor del residuo de $f(z)$ en $z = 0$.

3. **a)** Hallar todas las funciones $f(z)$ analíticas de la forma $f(z) = u(x) + iv(y)$.
   b) Sea f holomorfa en todo el plano complejo, excepto en z_0 donde tiene un polo de orden 3, y $|z_0| < 3$ y $f(z) \neq 0$ para todo z: $|z| \leq 3$. Calcular $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$

4. Dada $T(z) = \dfrac{2-8z^2}{1+4z^2}$. Indique en qué puntos es conforme y halle $T(D)$, siendo:
$$D = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1/2;\ 0 \leq Arg(z) \leq \tfrac{\pi}{2}\right\}$$

5. Sea $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(-2)^{3n}} z^{n-4}$. **a)** Hallar el dominio de holomorfía de f, **b)** Hallar el valor de $I_1 = \displaystyle\int_{\mathcal{C}^+} z^2 f(z)dz$ y de $I_2 = \displaystyle\int_{\mathcal{C}^+} \frac{f(z)dz}{z^2}$, con $\mathcal{C} = \{|z-1| = 3\}$